التقريب التربيعي:

لنفرض أن الدالة $y = f(x)$ ونقربها من كثيرة حدود من الدرجة الثانية من الشكل:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

يجب أن يكون مربع الفرق $[y_i - P_2(x_i)]^2$ أصغريا

$$E(a_0, a_1, a_2) = \min \sum_{i=0}^{n} [y_i - P_2(x_i)]^2$$

$$= \min \sum_{i=0}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x^2)]^2$$

تبلغ نهاية حدية صغرى عندما تكون

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=0}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)] = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=0}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2] x_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=0}^{n} [y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2] x_i^2$$

نوزع إشارة المجموع على المعادلات نحصل على جملة المعادلات الخطية التالية:

1) $(n+1) \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i$

2) $a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i$

3) $a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum y_i \cdot x_i^2$

٣ معادلات خطية لمجاهيل ٣

بالحل المشترك لهذه الجملة الخطية من المعادلات المجاهيل a_0, a_1, a_2 بالحل نحصل على قيم a_0, a_1, a_2

SUBJECT:

بنفس المبدأ يمكننا تقريب كثيرات الحدود من الدرجات العليا مثل المثال التالي:

مثال: اوجد بطريقة المربعات الصغرى كثير حدود التقريب من الدرجة الثانية:

x_i	-2	-1	0	1
y_i	-3	2	1	0

لدينا لإيجاد كثيرة حدود التقريب لدينا:

$$(n+1)a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i + a_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \cdot y_i$$

$$4a_0 - 2a_1 + 6a_2 = 0$$
$$-2a_0 + 6a_1 - 8a_2 = 4$$
$$+6a_0 - 8a_1 + 18a_2 = -10$$

$$2a_0 - a_1 + 3a_2 = 0 \quad (1$$
$$-2a_0 + 6a_1 - 8a_2 = 4 \quad (2$$
$$6a_0 - 8a_1 + 18a_2 = -10 \quad (3$$

$$(1 \quad 2a_0 - a_1 + 3a_2 = 0$$
$$(2 \quad 5a_1 - 5a_2 = 4$$
$$(3 \quad -5a_1 + 9a_2 = -10$$

بجمعها $\Leftarrow$ $4a_2 = -6$

$a_2 = -\frac{3}{2}$

$$a_1 = -\frac{7}{10} \quad , \quad a_0 = \frac{19}{10}$$

وبالتالي $P_2(x) = 1.9 - 0.7x - 1.5x^2$

كثيرة حدود التقريب المطلوبة

SUBJECT:

x_i	-2	-1	0	1
y_i	9	-2	-1	-8

[٧] أوجد بالطرائق السابقة

كثيرة حدود التقريب

1. الفروق المباشرة (نيوتن).
2. الفروق المقسومة.
3. بطريقة لاغرانج "الدرجة الأولى - الثانية - الثالثة".
4. بطريقة المربعات الصغرى "الأولى الثانية - الثالثة".

• أوجد بطرائق السابقة: كثيرة حدود التقريب للدالة التالية:

$y = \tan(2x)$

$x_0 = 0$, $n = 4$, $h = \frac{\pi}{?}$

احسب الخطأ المرتكب الناتج بعد حساب.

أوجد القيمة التقريبية عند النقطة $x = 1$.

حساب قيمة كثيرات الحدود وقيمة مشتقاتها المتتالية عند نقطة محددة.

طريقة هورنر:

لنفرض لدينا كثيرة حدود من الدرجة $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \text{———} + a_0$ ولنوجد قيمة كثيرة الحدود وقيمة مشتقاتها المتتالية عند النقطة $x = x_0$ نضع الأمثال على سطر والأمثال المعلومة نكتب مكانها الصفر، ثم نجري العمليات التالية:

المقسوم

$a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \text{ ——— } a_1 \quad a_0$

المقسوم عليه $x = b$ $\quad b a_n \quad | \quad b a_{n-1}$

$a_n' \quad a_{n-1}' \quad a_{n-1}^{2} \qquad a_1' = P_1$ ناتج القسمة

$a_{n-1} = a_n$

نعيد هذه العملية على الناتج السابق فنحصل على قيمة كثيرة الحدود وقيمة مشتقاتها.

عند النقطة $x = 6$.

إذا الامثال تمثل المقسوم.

• اوجد قيمة كثيرة الحدود التالية عند النقطة $x=1$ وقيمة مشتقاتها المتتالية عند النقطة $x=1$.

$x^4 - 3x^3 + 2x - 1$

	1	-3	0	2	-1	
$x=1$		1	-2	-2	0	
	1	-2	-2	0	-1	$= \frac{P_4(1)}{0!}$

الجمع

$\frac{P_4(1)}{0!} = P_4(1) = -1$ إذا عوضنا بكثيرة الحدود نجد انه يطلع -1

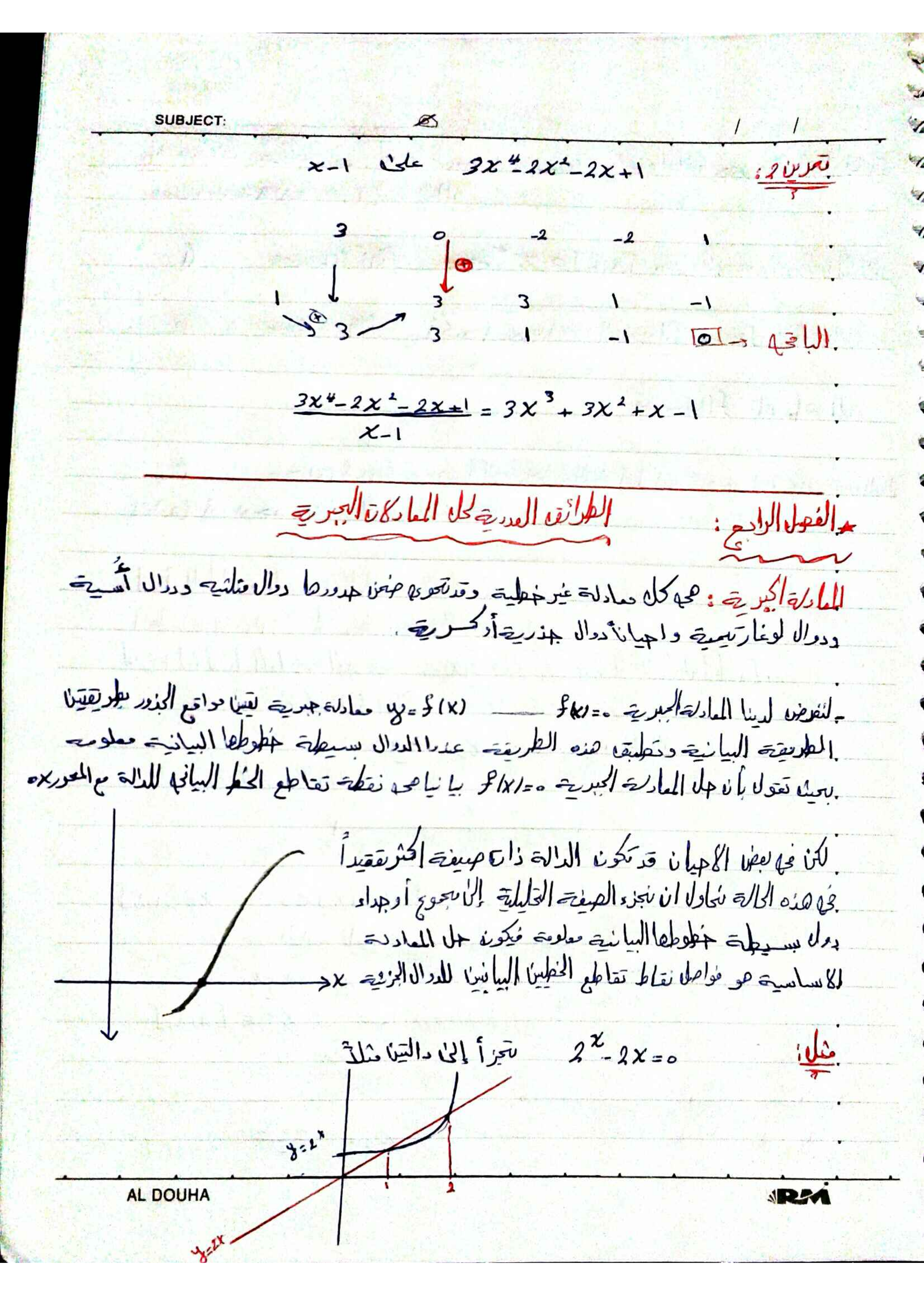
	1	-3	0	2	-1	
$x=1$	1	1	-2	-2	0	
		-2	-2	0	-1	$P_4(1)$
$x=1$	1	1	-1	-3		
		-1	-3	-3	$\frac{P_4'(1)}{1!} = -3$	
	↓	1	0			
$X=1$	1	0	-3	$\frac{P_4''(1)}{2!} = 6$		

تمرين 1: لدينا قسمة $x^4 - 2x^2 - 2x + 1$ على $x - 1$

	1	0	-2	-2	1	
$x=1$		1	1	-1	-3	
	1	1	-1	-3	-2	

الباقي

$$\frac{x^4 - 2x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \underbrace{x^3 + x^2 - x - 3}_{\text{الناتج}} - \frac{2}{x - 1}$$



تمرين 2: $3x^4-2x^2-2x+1$ على $x-1$

	3	0	-2	-2	1
1		3	3	1	-1
	3	3	1	-1	0 ← الباقي

$$\frac{3x^4-2x^2-2x+1}{x-1} = 3x^3+3x^2+x-1$$

★ الفصل الرابع: الطرائق العددية لحل المعادلات الجبرية

المعادلة الجبرية: هي كل معادلة غير خطية وقد تحتوي ضمن حدودها دوال مثلثية ودوال أُسية ودوال لوغارتيمية واحياناً دوال جذرية أو كسرية.

- لنفرض لدينا المعادلة الجبرية $f(x)=0$ ـــــ $y=f(x)$ معادلة جبرية نقيس مواقع الجذور بطريقتنا الطريقة البيانية وتطبق هذه الطريقة عندما الدوال بسيطة خطوطها البيانية معلومة بحيث تقول بأن حل المعادلة الجبرية $f(x)=0$ بيانياً هي نقطة تقاطع الخط البياني للدالة مع المحور x.

لكن في بعض الاحيان قد تكون الدالة ذات صيغة أكثر تعقيداً في هذه الحالة نحاول ان نجزء الصيغة التحليلية إلى مجموع أو جداء دوال بسيطة خطوطها البيانية معلومة فيكون حل المعادلة الاساسية هو فواصل نقاط تقاطع الخطين البيانيين للدوال الجزئية

مثال: $2^x-2x=0$ تجزأ إلى دالتين مثلاً

SUBJECT:

٢) هي الطريقة الجبرية : لتعيين الجذور لدينا $f(x)=0$ ولنبحث لماذا جذر ضمن المجال $[a,b]$ نحسب قيمة الدالة على أطراف المجال.

1) $f(a).f(b)<0 \Rightarrow x^* \in [a,b]$ نحكم على وجود الجذر ضمن المجال.

2) $f(a).f(b)=0$ أكيد أحدهما هو الجذر إما $f(a)=0$ وبالتالي a هو الجذر.

أو $f(b)=0$ بأن b هو الجذر.

3) $f(a).f(b)>0$ في هذه الحالة نميز حالتين إما انه لا يوجد اي جذر ضمن المجال $[a,b]$ أو يوجد جذور لكن عددها زوجي.

---

* لنبدأ الطرائق العددية بالطريقة الأولى:

- الطريقة الأولى: "طريقة تنصيف المجال"

لنفرض ان لدينا المعادلة الجبرية $f(x)=0$ ولنوجد جذرها في المجال $[a,b]$.

$f(a).f(b)<0$ فأكيد يوجد جذر

$x_0=\frac{a+b}{2}$ نقطة منتصف المجال

وهو التقريب الأول.

$x \in [a,x_0]$ $f(a).f(x_0)<0$

في هذه الحالة نأخذ منتصف المجال السابق

$x_1=\frac{a+x_0}{2}$

$x^* \in [a,x_1]$; $f(a).f(x_1)<0$

والاحتمال آخر

$x_2=\frac{a+x_1}{2}$

وهكذا نستمر بهذه العملية فنحصل على متتالية من الحلول التقريبية المتقاربة.

$$x_0, x_1 \text{ ——— } x_{n-1} \text{ ———}$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^*$$

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon \qquad \varepsilon > 0$$

$$x^* \simeq x_{i+1}$$

نلاحظ من خلال هذه الطريقة انه في كل مرة تقسم المجال على 2 فإن عدد المرات التي تقسم فيها المجال [a,b] يحقق المتراجحة التالية:

$$R = \frac{b-a}{2^n} < 10^{-x}$$

هذه المتراجحة تفيد في حساب الخطأ المرتكب بعد عدد محدود من المرات التنصيف أي تفيد بحساب الخطأ المرتكب بعد عدد عمليات تكرارية كما في المثال.

مثال: لنفرض لدينا المعادلة التالية:

$$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$$

- ونوجد حلها ضمن المجال [0,1] بطريقة تنصيف المجال.
- ثم احسب عدد مرات التكرار أو تنصيف المجال بحيث لا يتجاوز الخطأ المرتكب $\frac{1}{1000}$.

الحل: لهذه المعادلة اربعة جذور والمطلوب الجذر الموجود في هذا المجال.

$x^* \in [0,1]$ الجذر المطلوب $\qquad f(0).f(1) < 0$

$x_0 = 0.5$

$f(x_0) = -1.875$

(رسم: محور من 0 إلى 1 مع النقاط $\frac{1}{2}$ و 0.75؛ الإشارات ⊖ عند 0 و $\frac{1}{2}$ و 0.75، و ⊕ عند 1؛ الجذر هنا x_0 ، الجذر هنا x_1)

$f(0.5) \cdot f(1) < 0$

$x^* \in [0.5, 1]$ نقسم هذا المجال

$f(x_1) = -0.58984375 \quad \Leftarrow \quad x_1 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$

$f(0,75) \cdot f(1) < 0$ $x^* \in [0,75, 1]$

$x_2 = \frac{0,75+1}{2} = 0,775$

$f(x_2) = 0,05102539$

x_0 0,5 — x_1 0,75 — x_2 — 1

بالتالي

$x^* \in [0,75, 0,87]$ $f(0,75) f(0,875) < 0$

$x_3 = 0,8125$

$|x_3 - x_2| = 0,0625 \cong \varepsilon$

$x^* \cong 0,8125$

-2 عدد المرات لتضييق المجال لكي لا يتجاوز الخطأ المرتكب $\frac{1}{1000}$

$\frac{b-a}{2^n} < 10^{-3}$

$\frac{1}{2^n} < 10^{-3} \Rightarrow 2^n > 10^3$

$\log_{10} 2^n > \log_{10} 10^3 = 3$

$n \log_{10} 2 > 3 \Rightarrow n > \frac{3}{\log_{10} 2} = 9,9657 = 10$ عدد المرات من العشرة ومافوق

الطريقة الثانية: "طريقة القاطع "هوبودر"

لنفرض لدينا المعادلة الجبرية $f(x)=0$ ونوجدلها جذراً ضمن المجال $[a,b]$ على اعتبار $f(a) \cdot f(b) < 0$ نحسب على منحني الدالة النقطة a و $f(a)$ و النقطة b و $f(b)$.

ثم نصل بين هاتين النقطتين فيقطع مستقيم الوصل المحور ox في نقطة جديدة نسميها x_0

التي تعتبر التقريب الأول.

من جديد نأخذ على منحنى الدالة النقطة x_0 , $f(x_0)$ ثم نصل ما بين النقطتين x_0 , $f(x_0)$ و b , $f(b)$

فيقطع مستقيم الواصل للمحور ox في نقطة جديدة وهي x_2 كما في الشكل التالي:

a x_0 $f(x_1)$ x^* b

وهكذا باستمرار نحصل على متتالية من الحلول التقريبية.

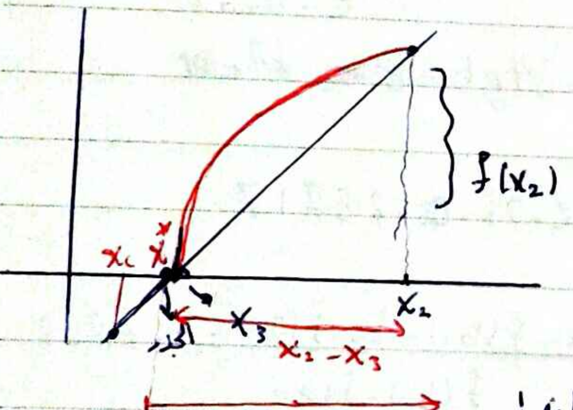
$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

تقترب شيئاً فشيئاً باتجاه الحل الحقيقي x^*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

نتوقف عند تحقق هذه العلاقة $\Rightarrow |x_{i+1}-x_i|<\varepsilon \; ; \; \varepsilon>0$

$$x^* \cong x_{i+1}$$



نوجد الآن هندسياً لإيجاد دستور لهذه الطريقة

$$f(x_2)-f(x_1)$$

من تشابه المثلثات:

$$\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}=\frac{f(x_2)}{f(x_2)-f(x_1)}$$

من هذه المساواة نكتب x_3 بدلالة بقية الحدود؛ فنجد أن:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2-x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}$$

$$x_3 = \frac{x_2 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1) - x_2 \cdot f(x_2) + x_1 \cdot f(x_2)}{f(x_2)-f(x_1)}$$

$$x_3 = \frac{x_1 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}$$

بالتالي:

$$x_n = \frac{(x_{n-2}) \cdot f(x_{n-1}) - (x_{n-1}) \cdot f(x_{n-2})}{f(x_{n-1})-f(x_{n-2})}$$

إذا رمزنا بـ $x_{n-1} = a_n$ و $x_{n-2} = b_n$

$$x_n = \frac{a_n \cdot f(b_n) - b_n \cdot f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

وهو دستور القاطع لإيجاد جذور المعادلات الغير خطية

• بكل خطوة ينتج مجال جديد ؛ يجب تحديد المجال في كل مرة $[a_n , b_n]$.
• لاحظ المثال الآتي :

لتكن لدينا المعادلة التالية أوجد حلها بطريقة القاطع :

$[0,1]$ $e^x - 3x = 0$ ؛ $\varepsilon = 0.04$

بهذه الطريقة لا نحتاج إلى نقطة ابتدائية

$\begin{cases} a_0 = 0 \\ f(a_0) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = 1 \\ f(a_1) = e - 3 = -0,28717 \end{cases}$

$\oplus$ 0 —— $\ominus$ x_0 —— $\ominus$ 1

$$x_0 = \frac{a_0 \cdot f(b_0) - b_0 \cdot f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = 0,78020 2717$$

$f(x_0) = -0,16869 3619$

نلاحظ $f(0) \cdot f(x_0) < 0$ أي إن الجذر $x^* \in [0, x_0]$

$x^* \in [0 , 0.78020 2717]$

$a_1 = 0 \Rightarrow f(a_1) = 1$

$b_1 = 0.78020 2717$; $f(b_1) = 0,15869 3619$

$$x_1 = \frac{a_1 \cdot f(b_1) - b_1 \cdot f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = 0,673346866$$

SUBJECT:

$\boxed{x_2 = 0,635681618}$ بنفس المبدأ نحسب x_2

$x_2 - x_1 = 0,037665247 < 0,04$

$x^* \cong x_2 = 0,635681618$

الحل المطلوب وفقا لـ ع.

★ ② أوجد بطريقة القاطع حلا للمعادلة:

$x^4 - 3x^3 + x - 1 = 0$ ضمن $[0,2]$ $\varepsilon = 0,005$